* الصفات العددية للمتغير العشوائي:

ومن أهم الصفات العددية:

1) التوقع الرياضي (القيمة المتوسطة) وتطبيقات القيمة المتوسطة.

تعريف التوقع الرياضي:

إذا كان X متغير عشوائي له توزيع احتمالي قد يكون متقطع وقد يكون مستمر $f_X(x)$ (مستمر) و $P_X(x)$ متقطع، وكانت الدالة $g(x)$ دالة في المتغير، والتي تلعب دور متغير عشوائي جديد تابع لـ X عندئذٍ التوقع الرياضي لهذا المتغير العشوائي بالشكل:

$$E\,g(x) = \begin{cases} \sum_x g(x)\, P_X(x) , & X \text{ متقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x) , & X \text{ مستمر} \end{cases}$$

ويكون هذا التوقع موجود إذا كانت كلمن المجموع والتكامل متقارب، وفي الحالة التي يكون فيها المجموع متباعد والتكامل متباعد عندئذٍ نقول عن التوقع الرياضي غير موجود (كل متقارب مطلقاً ⇐ متقارب ⇐ موجود)

* مثال: نعرض X متغير عشوائي:

$P_X(x) = (\frac{1}{2})^{x+1} , x = 0, 1, 2, \ldots$

هل التوقع الرياضي $E(3^X)$ موجود؟

$$E(3^X) = \sum_{x=0}^{\infty} 3^x (\tfrac{1}{2})^{x+1} = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\infty} (\tfrac{3}{2})^x$$

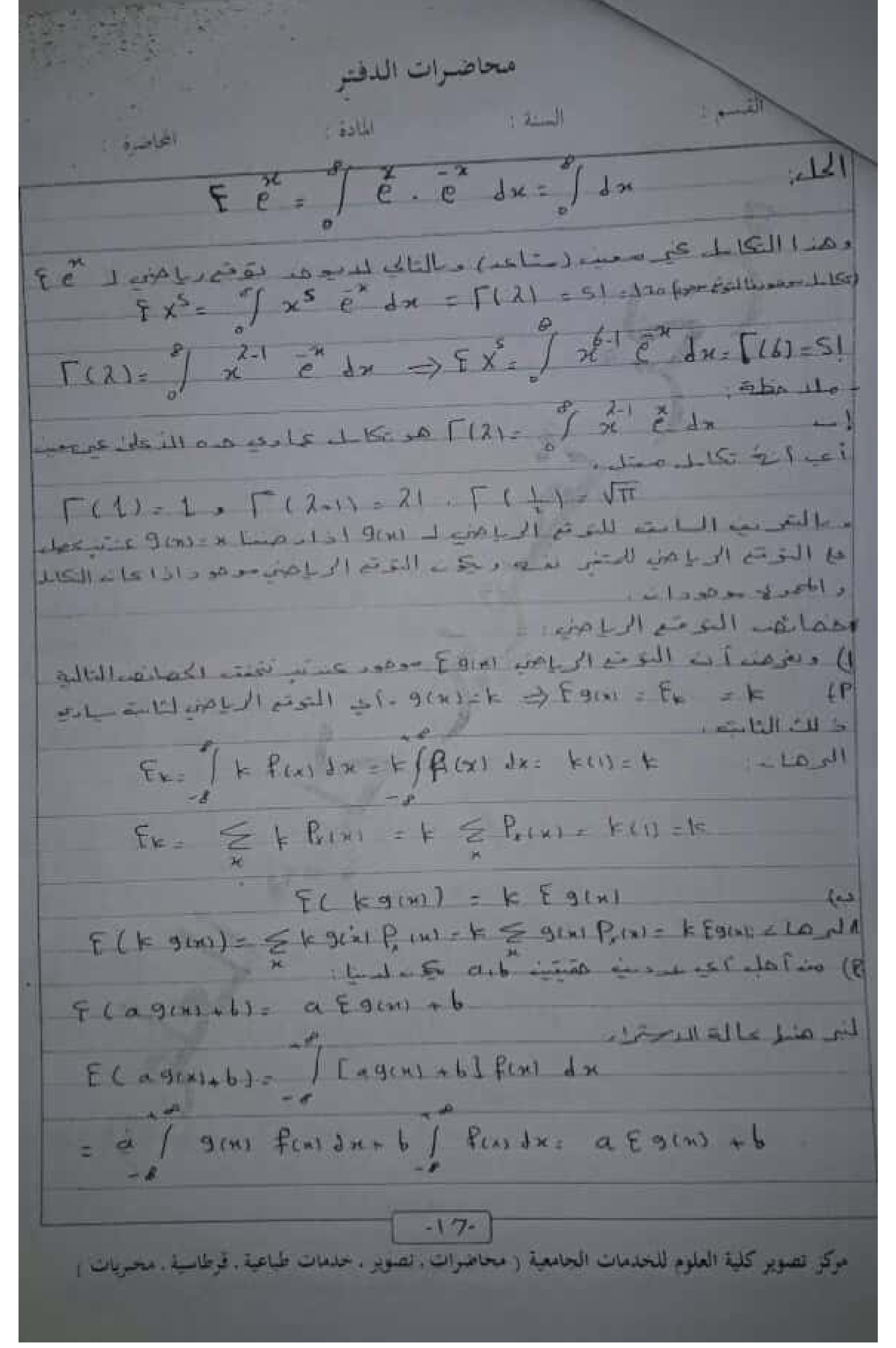
نلاحظ أن السلسلة تمثل قيم أكبر من الواحد وهو متباعد لأنه يمثل مجموع حدود متسلسلة هندسية أساسها أكبر من الواحد.

مثال (2): أوجد X متغير عشوائي له توزيع احتمالي

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x} ; & x > 0 \\ f(x) = 0 ; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

هل التوقع: 1) $E\, e^{X}$ (موجود)

" : 2) $E\, X^5$ (موجود)



الحل: $E e^{x} = \int_0^\infty e^{x} \cdot e^{-x} \, dx = \int_0^\infty dx$

وهذا التكامل غير معين (متباعد) وبالتالي لا يوجد توقع رياضي لـ $E e^{x}$

(تكامل معروف التوزيع جاما)

$E x^5 = \int_0^\infty x^5 e^{-x} \, dx = \Gamma(\lambda) = 5!$

$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} \, dx \Rightarrow E x^5 = \int_0^\infty x^{6-1} e^{-x} \, dx = \Gamma(6) = 5!$

ملاحظة:

إن $\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} \, dx$ هو تكامل جاما وهو التكامل غير معين أي أنه تكامل معتل.

$\Gamma(1) = 1$ ، $\Gamma(\lambda+1) = \lambda!$ ، $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

- التعريف السابق للتوقع الرياضي لـ $g(x)$ اذا كانت $g(x) = x$ عندئذ نحصل على التوقع الرياضي للمتغير نفسه ويكون التوقع الرياضي موجود اذا كانت التكامل والمجموع موجودات.

خصائص التوقع الرياضي:

1) ونفرض أن التوقع الرياضي $E g(x)$ موجود عندئذ تحقق الخاصية التالية

(P $g(x) = k \Rightarrow E g(x) = E k = k$ أي التوقع الرياضي الثابت يساوي ذلك الثابت.

البرهان: $E k = \int_{-\infty}^{\infty} k f(x) \, dx = k \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = k(1) = k$

$E k = \sum_x k P_r(x) = k \sum_x P_r(x) = k(1) = k$

2) $E(k g(x)) = k E g(x)$

البرهان: $E(k g(x)) = \sum_x k g(x) P_r(x) = k \sum_x g(x) P_r(x) = k E g(x)$

3) من أجل أي عددين حقيقيين a, b يكون لدينا:

$E(a g(x) + b) = a E g(x) + b$

لنبرهن حالة الاستمرار:

$E(a g(x) + b) = \int_{-\infty}^{\infty} [a g(x) + b] f(x) \, dx$

$= a \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \, dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = a E g(x) + b$

عندئذٍ

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

كون $f(x)$ دالة كثافة.

(3) اذا كانت التوقع $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ موجود عندئذٍ:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} E\,g_i(x)$$

مثال:

أفرض X متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية معطاة بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{-4x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{كل ما عدا ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

1) أوجد ما يلي EX , EX^2 , EX^3

2) ما هو التوقع الرياضي لـ $E(3x^3 + 2x^2 + 4x + 3)$

الحل:

1)

$$EX = \int_0^{\infty} x\,f(x)\,dx = 4\int_0^{\infty} x\,e^{-4x}\,dx$$

ومن أجل إيجاد التكامل نجري التحويل التالي:

$$4x = t \Rightarrow x = \frac{t}{4} \Rightarrow dx = \frac{dt}{4}$$

$$= 4\int_0^{\infty} \frac{t}{4}\,e^{-t}\,\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} t\,e^{-t} = \frac{1}{4}\,\Gamma(2) = \frac{1}{4}(1!) = \frac{1}{4}$$

وبأخذ نفس التحويل السابق:

$$Ex^2 = 4\int_0^{\infty} x^2\,e^{-4x}\,dx$$

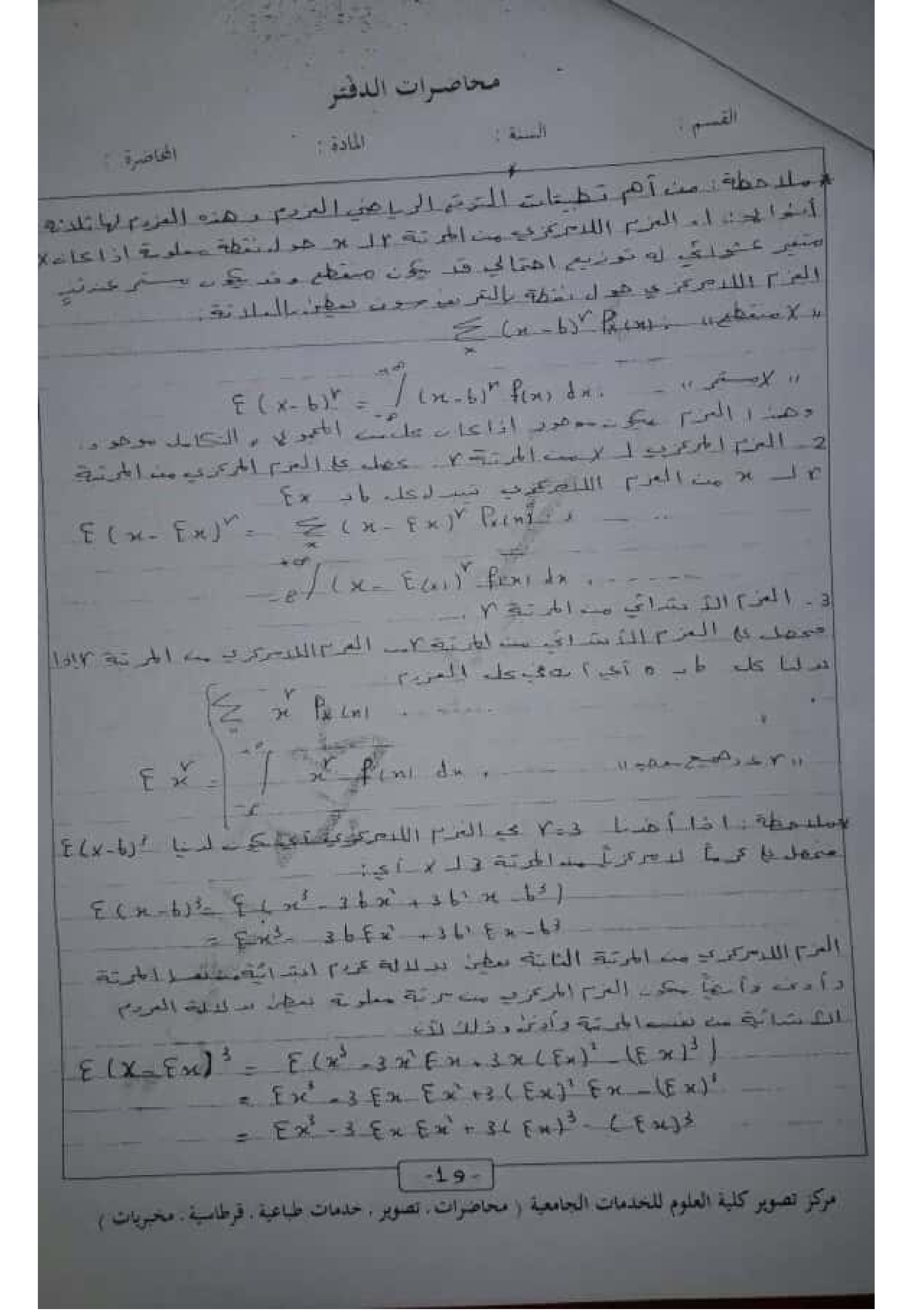
$$= 4\int_0^{\infty} \frac{t^2}{16}\,e^{-t}\,\frac{dt}{4} = \frac{1}{16}\int_0^{\infty} t^2\,e^{-t}\,dt \quad \frac{dt}{4} = \frac{1}{8}$$

$$Ex^3 = \frac{1}{4^3}\int_0^{\infty} t^{4-1}\,e^{-t}\,dt = \frac{1}{64}(3!) = \frac{6}{64}$$

2)

$$E(3x^3 + 2x^2 + 4x + 3) = 3Ex^3 + 2Ex^2 + 4Ex + 3$$

$$= 3\left(\frac{8}{64}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) + 3$$



محاضرات الدفتر

القسم: السنة: المادة: المحاضرة:

* ملاحظة: من أهم تطبيقات التوقع الرياضي العزوم، وهذه العزوم لها ثلاثة أنواع:

1. العزم اللامركزي من المرتبة r لـ x حول نقطة معلومة: إذا كان X متغير عشوائي له توزيع احتمالي قد يكون متقطع وقد يكون مستمر، عندئذٍ العزم اللامركزي حول النقطة b المعرف حسب صيغة المعادلة:

" X متقطع " $\sum_x (x-b)^r P_X(x)$

" X مستمر " $E(x-b)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-b)^r f(x)\,dx$

وهذا العزم يكون موجود إذا كان على المجموع، التكامل موجود.

2. العزم المركزي لـ X من المرتبة r: نحصل على العزم المركزي من المرتبة r لـ x من العزم اللامركزي تبدلنا b بـ Ex

$$E(x-Ex)^r = \sum_x (x-Ex)^r P_X(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-E(x))^r f(x)\,dx$$

3. العزم الابتدائي من المرتبة r: نحصل على العزم الابتدائي من المرتبة r من العزم اللامركزي من المرتبة r إذا بدلنا كل b بـ 0 أي إذا نحصل العزوم

$$E x^r = \begin{cases} \sum_x x^r P_X(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,dx \end{cases}$$

" r عدد صحيح "

* ملاحظة: إذا أخذنا r=3 في العزم اللامركزي يكون لدينا $E(x-b)^3$ معطياً عزماً لا مركزياً من المرتبة 3 لـ x أي:

$$E(x-b)^3 = E(x^3 - 3bx^2 + 3b^2x - b^3)$$

$$= Ex^3 - 3bEx^2 + 3b^2Ex - b^3$$

العزم اللامركزي من المرتبة الثالثة يعطى بدلالة عزوم ابتدائية من نفس المرتبة وأدنى، وأيضاً يمكن العزم المركزي من مرتبة معلومة يعطى بدلالة العزوم الابتدائية من نفس المرتبة وأدنى، وذلك لأن:

$$E(X-Ex)^3 = E(x^3 - 3x^2Ex + 3x(Ex)^2 - (Ex)^3)$$

$$= Ex^3 - 3Ex\,Ex^2 + 3(Ex)^2Ex - (Ex)^3$$

$$= Ex^3 - 3Ex\,Ex^2 + 3(Ex)^3 - (Ex)^3$$

* مثال: افرض ان X متغير عشوائي له توزيع احتمالي يعطى بالشكل:

$$P_X(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

λ عدد حقيقي موجب.

1) احسب كلا من Ex ، Ex^2

2) احسب العزم اللامركزي حول النقطة $x=1$ واحسب العزم المركزي من المرتبة الثانية

$$1)\ Ex = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x(x-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

وباجراء التعويض التالي: $y = x-1$

$$Ex = e^{-\lambda} \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}$$

وبما ان $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} = e$

وبما ان $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$

$$Ex = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$

Ex معلومة

$$Ex^2 = Ex(x-1) + Ex$$

ولنحسب $Ex(x-1)$

$$E_x(x-1) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$2)\ E(x-1)^2 = E(x^2 - 2x + 1) = Ex^2 - 2Ex + 1$$

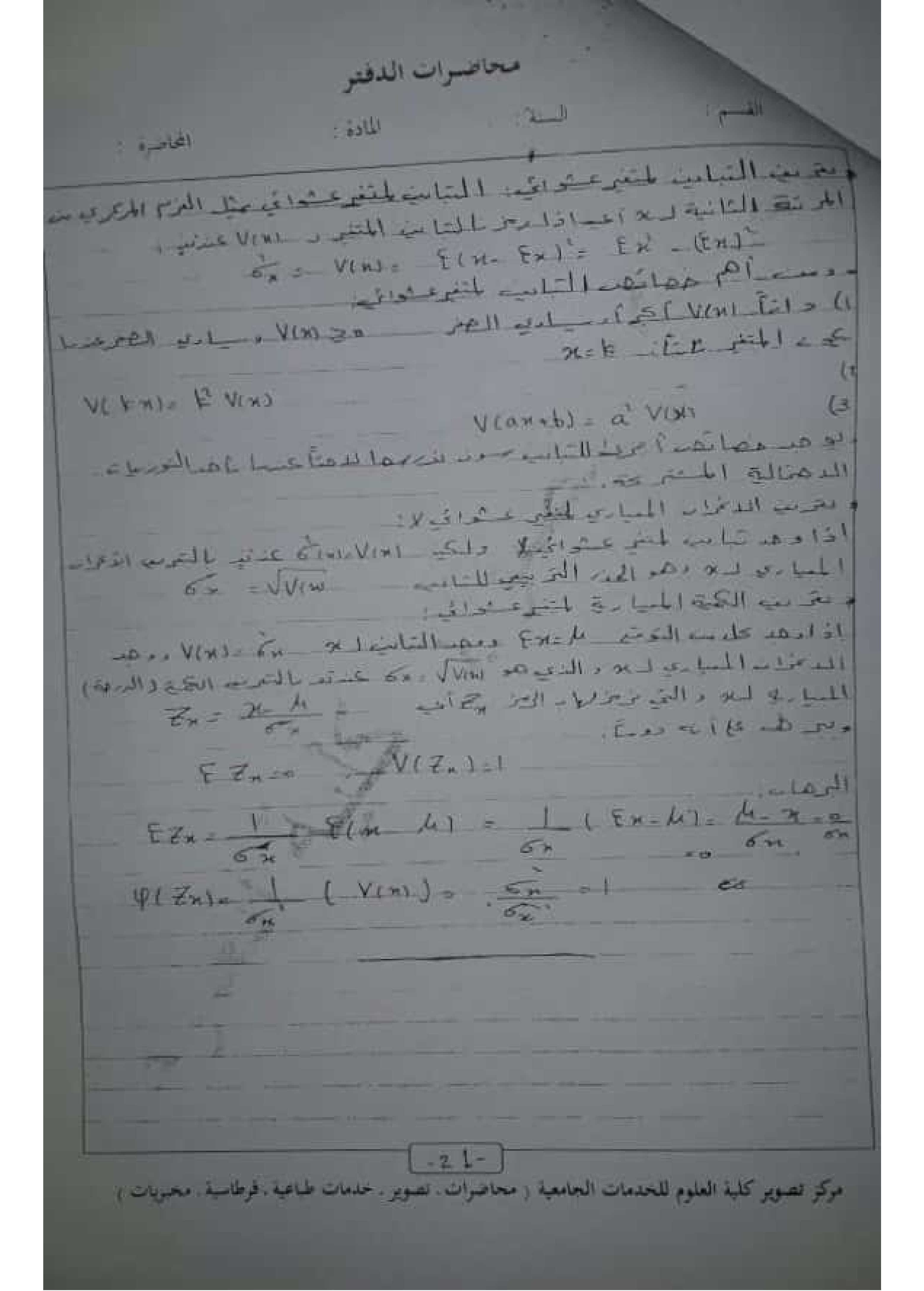
$$= (\lambda^2 + \lambda) - 2\lambda + 1$$

اما اذا طلب العزم المركزي من المرتبة الثانية فان:

$$E(x - Ex)^2 = E(x^2 - 2xEx + (Ex)^2)$$

$$= Ex^2 - 2(Ex)^2 + (Ex)^2 = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$



محاضرات الدفتر

القسم: السنة: المادة: المحاضرة:

- تعريف التباين لمتغير عشوائي: التباين لمتغير عشوائي يمثل العزم المركزي من المرتبة الثانية لـ x أي إذا رمز للتباين المتغير بـ $V(x)$ عندئذ:

$$V(x) = E(x - Ex)^2 = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$\sigma_x^2 = V(x)$$

- ومن أهم خصائص التباين لمتغير عشوائي:

1) دائماً $V(x) \geq 0$ أي أكبر أو يساوي الصفر
ويكون $V(x) = 0$ يساوي الصفر عندما يكون المتغير ثابت $x = k$

2)

3) $V(ax+b) = a^2 V(x)$ $V(kx) = k^2 V(x)$

- لو هي خصائص أخرى للتباين سوف نذكرها لاحقاً عندما نأخذ التوزيعات الاحتمالية المشتركة.

- تعريف الانحراف المعياري لمتغير عشوائي X:
إذا وجد تباين لمتغير عشوائي X ولكن $V(x) = \sigma^2$ عندئذ بالتعريف الانحراف المعياري لـ x وهو الجذر التربيعي للتباين $\sigma_x = \sqrt{V(x)}$

- تعريف الكمية المعيارية لمتغير عشوائي:
إذا وجد كل من التوقع $Ex = \mu$ وتباين لـ x $V(x) = \sigma_x^2$ ووجد الانحراف المعياري لـ x والذي هو $\sqrt{V(x)} = \sigma_x$ عندئذ بالتعريف الكمية (الدرجة) المعيارية لـ x والتي نرمز لها بالرمز Z_x حيث أن $Z_x = \frac{x - \mu}{\sigma_x}$
ويكون لها [illegible]

$EZ_x = 0$ $V(Z_x) = 1$

البرهان:

$$EZ_x = \frac{1}{\sigma_x} E(x - \mu) = \frac{1}{\sigma_x}(Ex - \mu) = \frac{\mu - \mu}{\sigma_x} = 0$$

$$V(Z_x) = \frac{1}{\sigma_x^2}(V(x)) = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2} = 1$$